Qualité et pratique en mathématiques
entre Hilbert et Grothendieck

Ce qui suit concerne un aspect des mathématiques pures assez représentatif du siècle dernier. On le fait débuter avec David Hilbert et aboutir avec Alexander Grothendieck, en passant par Nicolas Bourbaki comme signature collective ainsi que certains membres du groupe à titre individuel : André Weil, Jean Dieudonné, Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean-Pierre Serre, Jacques Dixmier, Roger Godement, Pierre Cartier entre autres. Dans cette liste Laurent Schwartz occupe une place en marge, comme on le verra. C'est ainsi d'une science typiquement "française" qu'il s'agit, même si les racines se trouvent dans la tradition germanique et si son influence a été planétaire, sans qu'elle ait été retenue par tous pour autant.

La pratique des mathématiques qu'on peut trouver chez les auteurs qui viennent d'être cités diffère essentiellement de celles d'autres mathématiciens, analystes français ou italiens par exemple. Préciser ce qui sous-tend cette différence est le principal objectif du travail.

La base de départ sera l'examen comparatif de quelques travaux. Appaîtront à cette occasion des **différences de qualité** significatives qu'il conviendra plus tard d'expliquer.

Pour des raisons pratiques d'exposition, sachant qu'il faut voir les choses en profondeur, l'étude sera limitée à quelques thèmes d'Analyse et à la période, au milieu du siècle dernier, faisant la jonction entre Bourbaki et Grothendieck. Malgré ces restrictions, une partie du discours paraîtra probablement très technique. On devrait, malgré tout, pouvoir se faire une idée, sans entrer dans la signification des termes. Juste quelques explications seront données pour les plus centraux.

Le thème de l'Analyse fonctionnelle est intéressant non pas par l'avenir qu'il va connaître, lequel ne sera pas aussi grandiose qu'on pouvait l'espérer à l'époque, mais par le laboratoire, le champ expérimental qu'il va constituer. Notamment on y verra les germes de l'emprise de la théorie des catégories sur les mathématiques.

Cette première partie bénéficie de discussions utiles tenues avec François Chargois, soit pour étayer le point de vue défendu, soit pour le contredire. Elle s'inscrit dans le prolongement du livre des Espaces vectoriels topologiques de Bourbaki[1]. Pour ce qui est du contenu du livre lui-même et des nombreuses rédactions préliminaires qu'il a provoqué, il sera fait implicitement appel à une interprétation synthétique faisant suite à un examen minutieux de ce gigantesque ensemble. Cette interprétation est, pour le moment, sans concurrence. Bien évidemment elle peut être discutée.

Cette partie introductive utilisera un langage imagé pour ses qualités évocatrices, un peu comme les mathématiciens le font en commentant leurs travaux. Plus tard la question se posera bien sûr de donner une définition précise des mots employés.

De Schwartz à Grothendieck.

Suivons donc un peu de l'Analyse fonctionnelle française, précisément entre la création par Schwartz de la théorie des distributions et l'introduction par Grothendieck des produits tensoriels topologiques. Ce sont deux grands moments de l'Analyse du

[1] ([Bo], 1953 à 1981)

20ème siècle, le second précédant de peu l'orientation vers "des choses plus plaisantes" encore, lesquelles permettront à Grothendieck de s'accomplir.

L'histoire commence vers 1943, alors que Schwartz invente puis paraphe sa fameuse théorie des distributions. Rappelons que, contrairement aux fonctions qui prennent leurs valeurs en des points, les distributions prennent leurs valeurs sur les fonctions de test; c'est donc par le choix de telles fonctions que démarre la théorie.

Un espace rassurant. Schwartz n'avait pas eu connaissance des travaux de Sergueï Soboleff datant de 1936; de toute façon il s'en démarque, considérant d'emblée des fonctions à support compact, non pas continûment dérivables jusqu'à un certain ordre, mais indéfiniment. Or de telles fonctions sont des monstres; c'est ce que pensait Cartan. On peut se poser la question de savoir jusqu'à quel point elles font partie du paysage mathématique. Aujourd'hui on saurait d'ailleurs comment s'en passer. Ce serait au prix d'un schéma intellectuel, mêlant les aspects projectif et inductif, inconcevable à l'époque et que, d'ailleurs, personne ne propose dans l'enseignement.

Avec l'espace de Schwartz, on travaille sur un espace vectoriel unique. Il y a un côté incontestablement rassurant à se mettre ainsi des œillères. Tous les étudiants le diront. La création mathématique peut être vertigineuse à l'occasion.

Une initution divinatrice. Vers 1945, Schwartz résout le problème qui le tenaillait : mettre sur son espace, en lieu et place de la notion de convergence qu'il avait considérée préalablement, une vraie structure d'espace vectoriel topologique. Il le fait de façon très explicite, présentant pour commencer un système de parties dépendant de trois paramètres. Il montre ensuite que son système définit une topologie localement convexe et enfin que la topologie possède un certain nombre de propriétés, dont il se servira.

Vers 1947-48, Dieudonné, à qui il a montré les résultats qu'il avait obtenu, subodore qu'il y a dans le paysage une construction générale. Il la rattache au concept de limite inductive, dont il connaît déjà des exemples en Algèbre. Grosso modo, on obtient une telle limite à partir d'une suite d'espaces de plus en plus grands, emboités les uns dans les autres, les plus grands "induisant" sur les plus petits la structure de ces derniers. En fait on est encore assez loin de la formulation aboutie de ce que doit être une telle limite. Mais ce n'est pas cela qui importe. C'est le fait d'avoir entraperçu, sous la brume, un élément nouveau de paysage.

Voici comment la question est introduite dans l'article signé en commun par les deux protagonistes[2] lequel date de 1949.

Considérons alors toutes les topologies $\mathcal{T}$ d'espace localement convexe sur E qui induisent sur chacun des E_n une topologie moins finie que $\mathcal{T}_n$; nous allons voir que parmi ces topologies, il en existe une $\mathcal{T}_\omega$ moins fine que toutes les autres.

Derrière la construction que Schwartz présente, Dieudonné voit davantage qu'une recette heureuse fournissant un résultat satisfaisant. Il y trouve la manifestation d'un principe qui va prendre une place grandissante en mathématiques, découvrant ainsi un nouveau paysage. En même temps, c'est sa vision unitaire des mathématiques, ici l'unité supposée entre l'Algèbre et l'Analyse, qui l'aide à avancer.

Une approche frontale. De son côté, Schwartz, qui a pourtant signé avec Dieudonné l'article mentionné, en restera toujours à sa vision initiale, particulière, explicite. Elle

[2] ([DS], 1948, p. 66)

suffit à son travail au jour le jour. Voici précisément ce qu'il écrit dans son ouvrage[3] sur les distributions dans l'édition de 1957.

> *La topologie de $(\mathcal{D})$.*
>
> *Nous allons introduire maintenant sur $(\mathcal{D})$ lui-même une topologie, qui rendra les mêmes services que le système des topologies sur les différents $(\mathcal{D}_K)$.*
>
> . . ..
>
> *Il est clair que, lorsque les suites $\{m\}$, $\{s\}$, $\{\Omega\}$, varient de toutes les manières possibles, les $V(\{m\};\{s\};\{\Omega\})$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans une topologie sur $(\mathcal{D})$, compatible avec sa structure d'espace vectoriel.*
>
> . . .
>
> *Rapports entre les topologies des $(\mathcal{D}_K)$ et la topologie de $(\mathcal{D})$.*
>
> . . .

Si l'on regarde de près cette présentation, on y trouve quelques indices révélateurs. D'abord, comme cela sera précisé plus loin, le paysage de l'analyse fonctionnelle, comme celui de la mathématique bourbachique en général, est occupé par des objets structurés. On ne leur donne pas de nom avant de les avoir habillés de leur structure. Or Schwartz fait le contraire : il commence par définir $(\mathcal{D})$ avant de se poser la question de la topologie qu'il va y mettre.

Ainsi jamais l'idée que telle structure soit naturelle sur un espace, étant donnée la façon dont il a été introduit, n'effleure Schwartz. Il se contente de faire des choix, comme c'est son droit, et il les justifiera par les services qu'ils rendront.

On noterait que la façon dont les exemples sont introduits dans l'article commun ne souffre pas cette critique. On peut lire entre autres : "l'espace des *fonctions entières*, la topologie étant celle de la *convergence compacte*"; avec cette formulation, la liberté de choix n'est pas apparente.

Dans l'énoncé d'un théorème II qui suit le dernier extrait, il est question, prise entre guillemets, d'une limite inductive; une note de bas de page renvoie à l'article commun. Or quand on regarde de près l'énoncé en question, ce n'est pas du tout la problématique de la limite inductive qui transparaît mais juste une description de la limite.

Plus loin figure un théorème III qui était dans l'article commun. Il caractérise la topologie comme une structure finale. En 1948, Bourbaki n'avait pas encore clarifié cette question, encore moins celle des limites inductives. Mais ce sera fait dès 1953. Pour autant la présentation donnée par Schwartz est toujours utilisée de nos jours par beaucoup de monde en Analyse; bien souvent c'en est même une plus opaque encore qui est retenue.

On voit ainsi s'opposer deux conceptions inconciliables. D'un côté, on part d'une problématique et on bâtit une solution. De l'autre, on se contente du minimum permettant de travailler.

Une décantation difficile. Entre 1950 et 1953, Bourbaki[4] commence par remplacer la suite de l'article conjoint par une famille filtrante croissante. Malheureusement il ne fait que s'embourber dans la confusion.

---

3 ([Sc1], 1957)

4 [NB1], 1950, p. 5)

Dans son cours à São Paulo qui date de 1953, Grothendkieck[5] n'a pas beaucoup progressé non plus par rapport à l'article de Dieudonné-Schwartz. Il écrit ceci.

> **Définition 1.** *Soit E un espace vectoriel, (E_i) une famille d'ELC, soit pour tout i, u_i une application linéaire de E_i dans E. On appelle topologie* **limite inductive** *des E_i (par les applications u_i) la topologie localement convexe la plus fine sur E rendant continues les u_i.* Muni de cette topologie E est appelé **limite inductive** des E_i (par les applications u_i).

Par rapport à l'article mentionné, on constate déjà une petite différence : les E_i ne sont pas des sous-espaces de E et on met l'accent sur la continuité des applications plutôt que sur la comparaison des topologies. Grothendieck vient, très précisément et très proprement, de définir ce qui sera appelé plus tard une structure finale. Il a pressenti qu'on étendait la portée du discours en remplaçant par des morphismes — qui sont ici des applications continuyes — la comparaison de topologies.

On peut juste être étonné par le nom de limite inductive qu'il donne à l'espace qu'il construit. A la rigueur parler de topologie limite inductive peut être admis; mais où voit-on une "limite"? Par exemple, lorsqu'on ne se donne aucun E_i, comment l'espace E, qui est quelconque, pourrait-il être la limite de rien du tout? La raison est simple : Grothendieck pressent le bon cadre, mais il n'ose pas encore se délivrer des usages. Le cours cité fourmille d'exemples du même type. Quand il s'épanouira en Géométrie algébrique, Grothendieck manifestera, tout au contraire, un génie dans le choix non seulement des concepts, mais aussi des mots.

Tout simplement Grothendieck n'avait pas encore vraiment regardé en détail le paysage. Ou, plus exactement, il regardait d'un côté, celui des EVT, où il n'y avait pas suffisamment de choses à voir.

Il faut en effet comprendre que la création mathématique n'est pas laissée à la fantaisie des auteurs. Elle doit s'imposer en fonction de ce que l'on en connaît ou que l'on a conçu par ailleurs, d'un besoin que la partie connue ou conçue fait apparaître. Il faut éventuellement regarder là où il convient.

Les produits tensoriels. Après avoir vu Grothendieck clarifier, encore très incomplètement, une question déjà posée par une meilleure lecture du sujet qui l'occupe, on nous allons le voir innover complètement, mais toujours dans le même esprit. Nous sommes en 1952.

S'il est une question pour laquelle son apport à l'Analyse fonctionnelle n'est contesté par personne, c'est en effet celle des produits tensoriels topologiques et des applications nucléaires. On se contentera ici de considérer la définition initiale. On peut déjà y relever des points instructifs.

Dans un article présentant les principaux résultats de sa thèse[6] il écrit ceci.

> THEOREME 1. – *Si E et F sont deux espaces localement convexes, on peut munir $E \otimes F$ d'une topologie localement convexe et d'une seule, telle que pour tout espace localement convexe G, les applications bilinéaires* continues *de $E \times F$ dans G correspondent exactement aux applications linéaires* continues *de $E \otimes F$ dans G.*

[5] ([Gr3], 1953, p. 248)
[6] ([Gr1], 1952, p. 73)

Ensuite il explique que les parties équicontinues se correspondent aussi; dans le cas où E, F sont normés, on peut trouver une norme sur $E \otimes F$ correspondant à celle sur l'espace des applications bilinéaires continues.

Dans la rédaction plus détaillée de sa thèse[7], il s'y prend comme suit.

> PROPOSITION 1 . – *Soient E et F deux espaces vectoriels, α (resp. β) une semi-norme sur E (resp. F). Alors il existe sur le produit tensoriel $E \otimes F$ une semi-norme et une seule γ ayant la propriété suivante : ...*

On trouve dans la première version le souci de présenter l'objet qu'il construit à partir d'une propriété qui en est attendue et qui le caractérise sans ambiguïté.

La seconde, dont il attribue la paternité à R. Schatten, marque un nouveau progrès. On traite d'un seul coup les applications continues, les parties équicontinues et le cas normé. Pour cela on passe par la considération d'une objet particulier qui est la donnée d'un espace vectoriel et d'une semi-norme. Ces objets permettent en effet de décrire les espaces vectoriels localement convexes généraux.

Ce n'est pas fondamentalement une stratégie nouvelle. Déjà, en 1937, Weil avait montré comment décrire les espaces uniformes généraux à l'aide d'espaces munis d'un écart, qui en sont, d'une certaine façon, des cas particuliers. Cependant ce genre de réduction n'était pas très à l'honneur en Analyse au moment où Grothendieck écrit sa thèse. D'ailleurs on ne peut pas dire que l'idée se soit imposée à tous depuis.

Voyons, par exemple, comment Schwartz expose les travaux de Grothendieck dans son séminaire de 1953/1954[8]. Il reprend presque mot pour mot la rédaction du résumé ci-dessus. Quelques différences de détails sont malgré tout révélatrices.

Ainsi place-t-il, à l'intérieur même de l'énoncé qui sert à la définition de la topologie sur $E \otimes F$, deux compléments :

d'abord il mentionne que les parties équicontinues se correspondent;

surtout il caractérise la topologie sur $E \otimes F$ comme la plus fine qui rende continue l'application bilinéaire naturelle de $E \times F$ dans $E \otimes F$.

Dans tout cela, Schwartz révèle son aversion pour une formulation novatrice et préfère se réfugier, dès qu'il le peut, dans la comparaison des topologies sur un même espace.

Grothendieck est déjà sur la voie des foncteurs représentables. Ici tout n'est pas encore éclaici pour autant. De même que les limites inductives ont été vues commes des structures finales, la topologie venant compléter une structure algébrique imposée, de même le produit tensoriel topologique est-il construit sur un produit tensoriel algébrique préalablement obtenu.

L'essentiel n'est cependant pas là. Il est dans le fait que regarder autrement les mathématiques, d'y voir un paysage qu'on n'avait pas soupçonné, avec pour conséquence, non seulement de s'exprimer de façon plus claire mais aussi d'aborder des questions totalement nouvelles.

Il est surtout remarquable que le nouveau paysage s'impose absolument, alors même qu'on ne sait pas trop si l'on pourra en faire coller la vision avec les fondements. "L'intendance suivra" pense sans doute Grothendieck, de même que le physicien qui

[7] [Gr2], 1955, p. 28)

[8] [Sc2], 1954, exposé n°1)

découvre un phénomène en étudiant le monde physique n'attend pas pour en parler qu'une théorie bien léchée vienne l'expliquer.

La question qui se pose est maintenant la suivante : **quelle est cette qualité particulière** qu'on rencontre déjà un peu avec Bourbaki et davantage avec Grothendieck? Quand on sait l'influence que Hilbert a eu sur Bourbaki, on doit adjoindre le premier au groupe de mathématiciens à considérer avec les deux précédemment mentionnés. Bien sûr il y en aurait pas mal d'autres.

De la pureté au naturel.

Pour commencer, il convient de noter que la qualité que les mathématiciens évoqués ont conféré à la connaissance qu'il ont apportée est moins liée à la véracité de cette dernière qu'à sa pertinence : entre des résultats vrais — dans le cadre où l'on s'est placé — certains ont plus d'intérêt que d'autres.

Quand on compare, entre Schwartz d'une part et Dieudonné ou Grothendieck de l'autre, la façon d'interpréter les résultats et aussi d'attaquer les problèmes, on découvre chez les derniers un souci de débarrasser le sujet de tout ce qui peut être annexe, contingent. Ainsi est-on amené à explorer la voie suivant laquelle cette qualité serait une forme de *pureté*. Dieudonné ne qualifie-t-il pas l'oeuvre de Hilbert de "pure beauté"? C'est d'ailleurs ce que suggère la consigne formulée par Hilbert lui-même, qu'on trouve notamment discutée chez A. Arana[9].

> *In der modernen Mathematik wird solche Kritik sehr häufig geübt, wobei das Bestreben ist, die Reinheit der Methode zu wahren, d. h. beim Beweise eines Satzes wo möglich nur solche Hülfsmittel zu benutzen, die durch den Inhalt des Satzes nahe gelegt sind.*

Cependant, avant même de savoir si la pureté convient pour caractériser la qualité dans la situation envisagée, il faudrait déjà en préciser clairement le sens. Or, de toute évidence, la consigne que donne ici Hilbert n'a pas toujours été correctement interprétée, prise trop souvent à la lettre jusqu'à la rendre incompatible avec la pratique de Hilbert lui-même. Ce dernier reconnait d'ailleurs qu'il faut en donner une interprétation subjective (*subjektive Fassung*). Ainsi M. Hallett[10] s'exprime-t-il clairement dans ce sens.

> *Hilbert emphasized that the demand for purity of method is nothing else than a 'subjective interpretation' of the so-called 'basic principle' which underlies axiomatic thinking, namely the requirement to investigate whether a given problem can or cannot be solved with a certain stock of specified means. But the kind of 'appropriateness' involved here lies deeper than mere homogeneity within the realm of one allegedly well-demarcated mathematical discipline.*

Par exemple, la notion de pureté topique (*topical purity*) introduite par A. Arana et M. Detlefsen[11] ne convient absolument pas ici. Cette dernière exige que la solution repose seulement sur les "mandats" (*commitments*) qui déterminent le problème lui-même. Déjà elle ne convient pas dans le cas de Hilbert, lequel considère que s'appuyer sur des moyens extérieurs a souvent un fondement profond et conduit à des rapprochements aussi beaux que fructueux; il cite notamment le lien entre la théorie des nombres et la fonction ζ

[9] ([Ar], 2008, p. 1)
[10] ([Ha], 2008, p. 282)
[11] ([AD], 2011, p. 13)

de Riemann, donné précisément comme exemple de voie non topiquement pure pour la répartition des nombres premiers.

Dans un problème aussi simple que l'existence d'une infinité de nombres premiers, la pureté topique écarte l'usage d'une topologie sur l'anneau $\mathbf{Z}$ des nombres entiers rationnels. Il est vrai qu'on dispose depuis Euclide d'une démonstration élémentaire qui nous suffit. Cependant la topologie fait partie du paysage de $\mathbf{Z}$, pour parler comme dans la première partie. Quand on pense à la divisibilité, on voit cet anneau comme la limite projective du système

$$\mathbf{Z}/(n) \to \mathbf{Z}/(m)$$

où m divise n. Chaque facteur est un espace discret compact et la limite est elle-même compacte (pour la topologie correspondante).

A fortiori l'idée plus ancienne de pureté, qui faisait la distinction entre les travaux de “mathématiques pures” fondés sur l'arithmétique et autres fondés sur la mécanique ou la physique, n'était-elle absolument pas adaptée. Au vingt-siècle plus aucun analyste ne s'appuie sur une heuristique d'origine mécanique ou physique.

Il faut donc chercher ailleurs. La stratégie va consister à définir la notion de pureté utile au propos à partir d'autres, avec l'espoir que ces dernières puissent donner lieu à une analyse plus objective. Dans le cadre de ce travail, c'est la notion de *naturel* qui sera retenue, en pensant prioritairement à la pratique scientifique.

Glisser de la “pureté” vers le “naturel” est en réalité ce que fait Hilbert. On dirait aujourd'hui qu'il convient d'attaquer un problème par des voies qui sont *naturellement* suggérées par son énoncé. Grothendieck[12] dit à peu près la même chose, quand il décrit sa pratique.

> *La chose inconnue m'apparaissait . . . comme une marne compacte. On peut s'y mettre avec . . . des marteaux piqueurs. C'est la première approche . . . L'autre est celle de la mer. La mer s'avance insensiblement et sans bruit . . . La substance rétive . . . finit par être submergée . . .*

Le rapport au naturel est à prendre ici au premier degré, sachant par ailleurs que Grothendieck préconise la seconde approche : il faut laisser la nature, représentée par la mer, faire le travail toute seule, plutôt que de recourir à des artifices, comme des marteaux-piqueurs.

L'intervention d'un “monde mathématique”.

Maintenant remplacer la pureté par le naturel ne fait que repousser le problème. Prenant le qualificatif “naturel” au sens primitif, il s'agit désormais de donner un sens à la conformité à une certaine nature. La première idée qui se présente est de prendre pour la nature le “monde mathématique”. Sera ainsi qualifié de naturel ce qui relève précisément de ce monde.

Dieudonné rattache la pureté à la nature observable, quand il présente la stratégie de Hilbert comme suit[13].

> *. . . Hilbert aboutit à ses grandes découvertes . . . en revenant à l'origine de la question traitée, et dégageant de la gangue, où nul n'avait su les voir, les principes*

[12] ([Gr4], III - L'enterrement (2) ou la clef du Yin et du Yang)
[13] ([Di], 1962, p. 292)

fondamentaux qui permettent de tracer vers la solution la "route royale" vainement cherchée jusqu'alors.

Où se situe donc ce fameux "monde mathématique"? Certains, comme Alain Connes et très certainement Grothendieck également, le placent dans la nature même, ce qui est audacieux. D'autres, plus raisonnablement peut-être, en font un chapitre du monde des idées, lui conférant un caractère anthropologique, voire civilisationnel. Ils ne sont pas loin de l'aventure collective chère à Grothendieck. Voici ce qu'écrit, de son côté, Nicolas Bourbaki[14] dans sa réflexion sur les mathématiques.

> *Guidés par la perception axiomatique, essayons donc de nous représenter l'ensemble de l'univers mathématique.*

Cela étant, on doit pouvoir faire l'économie d'un tel débat ontologique sur les mathématiques. Pour ce qui est du ressenti au sens le plus banal chez le chercheur qui accepte l'idée d'un "monde mathématique", ce dernier s'impose à lui au même titre que le monde physique, pris ici dans le sens de la nature elle-même. Peu lui importe que ce ne soit qu'une illusion, une simple façon de s'exprimer pour décrire sa pratique.

C'est exactement ce que dit Nicolas Bourbaki[15] quand il parle de l'intuition.

> ... *de la part d'êtres mathématiques qu'une longue fréquentation lui a rendus presque aussi familiers que les êtres du monde réel.*

L'avantage de ne pas entrer dans le débat est clair, quand on sait que, dans leur grande majorité, les mathématiciens partagent le point de vue de Connes, tout en pratiquant à leur guise sans référence à quelque monde objectif. C'est l'idée absurde et répandue qu'on peut faire les mathématiques que l'on veut et qu'elles s'appliqueront, comme par magie. En bref, les choix ontologiques pour les mathématiques n'ont pas d'incidence sur la pratique.

Le "monde mathématique" idéal doit posséder les qualités qu'on peut prêter à la nature. La plus importante est son unité : il est fait d'un seul continent.

Il y a de bonnes raisons d'associer Hilbert, Bourbaki et Grothendieck à la vision unitaire du monde mathématique. Chacun a participé, à sa manière, à la mise en place d'outils fondamentaux utilisés dans tous les domaines et qui renforcent cette unité. Il n'est pas nécessaire de s'appuyer sur une étude historique approfondie pour cela. Rappelons simplement quelques points d'une grande banalité, assez communément admis parmi les mathématiciens.

La part de Hilbert dans la construction du "monde mathématique" tient notamment à la façon dont il a su profiter de la théorie des ensembles, sans laquelle le paradis construit par Cantor n'existerait pas aujourd'hui. On peut considérer que celle-ci commence notamment avec la démonstration d'un théorème prouvant la finitude d'un ensemble à partir de la considération d'un ensemble infini.

La part de Bourbaki est la mise au clair de la notion de structure, bien au-delà des seules structures algébriques connues jusqu'alors. Les structures sont des outils pour résoudre des problèmes (des équations par exemple) et s'effacent une fois le travail fini. Avec les ensembles et les structures, le "monde mathématique" devient cohérent. Il est peuplé de ce qu'on peut appeler des objets.

---

[14] ([NB2], 1962, p. 43)

[15] ([NB2, 1962, p. 42)

Il l'est plus encore avec la théorie des catégories inventée par Eilenberg et MacLane et magnifiquement éclairée par les travaux de Grothendieck; on pourra se référer à R. Krömer[16]. C'est Grothendieck qui intervient pour nous expliquer ce qu'il faut faire de cette théorie, en commençant par dégager la notion de foncteur représentable, sans laquelle un grand nombre de constructions ne peuvent trouver pleinement leur sens. D'ailleurs le qualificatif "naturel" est utilisé aujourd'hui en mathématiques comme un synonyme de "fonctoriel".

Ainsi la notion de proximité n'a-t-elle pas de sens dans les mathématiques ici considérées. Cela explique pourquoi il n'est pas envisageable de retenir, pour elles, le sens donné à la pureté par certains philosophes. Pour les mathématiques en question, parler d'extériorité par rapport à un domaine, de pureté logique ou de pureté sémantique, rien de cela n'est possible.

A la place, il sera fait usage du terme de *paysage*. Un paysage est simplement défini comme ce qui s'insère dans le "monde mathématique".

Comment le "monde mathématique", à défaut de recevoir une définition claire, intervient-il dans la pratique mathématique? Simplement à ce monde sera associée une **pratique nouvelle sous-tendue par une nouvelle vertu épistémique.**

Du "bon goût" à la foi.

Une autre façon de s'exprimer consiste à dire que la quête de naturel, c'est-à-dire de conformité avec le "monde mathématique", est pour la pratique quotidienne du chercheur le respect d'un certain "bon goût". C'est ce "bon goût" qui lui fait distinguer ce qui est naturel de ce qui ne l'est pas. Encore une fois, cette façon de concevoir la pratique n'est pas reconnue par la communauté mathématique dans son ensemble.

Il convient de corriger ici quelques lieux communs. Il est indéniable que Hilbert a montré l'exemple en s'inscrivant dans la méthode axiomatique, que Bourbaki s'en est plus que fortement inspiré en le revendiquant hautement et que Grothendieck est resté sans même y penser sur cette ligne. Cependant pratiquement personne ne fait aujourd'hui le contraire. Surtout l'espace de liberté que procure cette méthode est strictement encadré par le respect du "bon goût". On ne choisit pas les axiomes à sa guise, on ne considère pas comme égales toutes les démonstrations. Les adeptes du "bon goût" sont moins libres que d'autres, en tout cas moins utilisateurs d'une axiomatique à tout va.

Par ailleurs on voit souvent Bourbaki comme un partisan, voire un fanatique, de la rigueur formelle. Il est vrai que son traité s'appuie sur un chapitre de logique formelle dans la plus parfaite intégration. S'en tenir à cela serait oublier que Bourbaki n'a jamais rien eu contre les transgressions. En effet, sa mathématique formelle, inspirée par Hilbert, n'est pas du goût des logiciens. D'ailleurs Hilbert lui-même, qui lui a ouvert la voie, a déjà beaucoup transgressé, en mettant à la mode des méthodes non effectives, comme pour son théorème de finitude en théorie des invariants. Il prouve l'existence d'un ensemble fini de générateurs sans construire un tel ensemble ni indiquer un moyen pour le faire, seulement en montrant que l'hypothèse contraire conduit à une contradiction. Grothendieck, qui achèvera son aventure, prendra des libertés bien plus grandes encore avec la logique, jusqu'à considérer des limites de catégories.

[16] ([Kr], 2007)

Notre “bon goût” peut-il alors s’expliquer par **des vertus épistémiques particulières?** Là il semble bien qu’aucune des vertus usuellement retenues ne convienne. Les mathématiciens cités ne sont pas plus honnêtes, ni plus exempts d’a priori, par exemple.

Les vertus morales elles-mêmes, comparées aux vertus épistémiques notamment par R. Pouivet[17], sont-elles mieux indiquées? Il ne le semble pas. A la rigueur certaines vertus chrétiennes, comme l’humilité, pourraient être retenues.

Il y a en réalité beaucoup plus simple. La principale vertu qu’on attend chez un mathématicien en quête de naturel est l’adhésion entière à l’idéal constitué par le “monde mathématique”, lequel le dépasse en tant qu’individu.

Cela conduit à prendre à désigner comme la *foi*, prise ici comme vertu épistémique, la croyance dans l’existence de ce monde mathématique, indépendamment de ce qu’il peut recouvrir. Toujours par définition, le “bon goût” n’est alors que l’expression de cette foi.

L’allusion à la vertu théologale qu’est la Foi est évidente. Cependant il n’est absolument pas question de mêler des considérants théologiques au présent discours.

C’est déjà tout cela qui va être exploré, à la lumière de quelques exemples. Identifier des marqueurs de cette foi particulière, génératrice de “bon goût”, se fait en regarder soigneusement les écrits des uns et des autres.

La première partie a fourni des exemples de cette foi. Quand Dieudonné voit dans l’espace de Schwartz une limite inductive, même si c’est sous une forme non encore aboutie, il y a incontestablement le signe d’une vertu épistémique dans le souci, plus ou moins imposé à Schwartz, de se placer dans un cadre un peu systématique pour comprendre. C’est bien la foi, la croyance en ce “monde mathématique” dont la réalité s’impose avec force à celui qui veut bien croire. En même temps, c’est la foi dans l’unité des mathématiques qui lui impose une vision unitaire couvrant l’Algèbre et l’Analyse.

Par ailleurs il conviendrait de noter ceci. Les vertus épistémiques s’associent souvent en groupe. On s’attendrait donc à devoir considérer des analogues des autres vertus théologales que son l’espérance et la charité. Ce serait bien le cas, mais cela n’entre pas dans le cadre de l’objectif visé ici.

Le “monde mathématique” est ainsi, par définition, celui même que construisent les mathématiciens “vertueux”. Ce sont eux qui décident de ce qui compose un paysage ou non. Ils répugnent à y introduire les fonctions “monstrueuses” de l’espace $\mathcal{D}$, mais n’ont pas peur d’entreprendre des constructions hardies. Leur inclination “virtueuse” les fait partir d’une problématique pour bâtir une solution naturelle, là où le penchant “utilitariste” fait se contenter de montrer une solution. De façon générale, ce sont qui regardent là où ils convient ou qui regardent autrement et qui découvrent éventuellement de nouveaux éléments de paysage. C’est ainsi que Grothendieck a pu se plonger “à livre ouvert” dans le monde mathématique, dàs qu’il s’est orienté vers la géométrie algébrique.

Des marqueurs de la foi.

On trouve quelques marqueurs de la foi considérée, bien que rarement, dans la réflexion que les mathématiciens privilégiés dans cette étude font à propos d’eux-mêmes. C’est ainsi que Weil[18] parlant du mathématicien, dit ceci.

[17] ([Po], 2010)
[18] ([We2], 1962, p. 320)

> ... *satisfait qu'il est de croire étancher sa soif aux sources mêmes du savoir, satisfait qu'elles jaillissent toujours pures et abondantes ...*

Le plus intéressant cependant est de relever des marqueurs de la foi à l'intérieur même d'un texte mathématique. Voici quelques extraits significatifs à ce propos. Bien sûr ils traduisent la personnalité de leur auteur. Mais cela va bien au-delà de la façon de s'exprimer, comme on peut le vérifier en plaçant ces extraits dans leur contexte. Disons que ces derniers correspondent à des articulations stratégiques dans la démarche et qu'ils sont, chaque fois, révélateurs de conceptions très différentes.

Voici, pour commencer, un extrait d'un opuscule sur les structures uniformes[19] écrit par le même Weil en 1937.

> ... *on voit apparaître ici cette hypothèse du dénombrable (dite aussi, on ne sait pourquoi, de séparabilité), malfaisant parasite qui infeste tant de livres et de mémoires dont il affaiblit la portée tout en nuisant à une claire compréhension des phénomènes. Non seulement, en effet, la conscience d'un mathématicien, s'il en possède, doit répugner à faire intervenir une hypothèse superflue et étrangère à la question qu'il a en vue ...*

Weil ne donne pas ici une opinion personnelle, mais ce qu'il sait de la vérité. Aussi est-il catégorique. C'est bien cette attitude intransigeante qui a conduit à la découverte des deux outils fondamentaux, à peu près contemporains, que sont les filtres de Cartan et les structures uniformes de Weil ici considérées. Dans les deux cas, il s'agissait de se débarrasser d'une hypothèse de dénombrabilité, laquelle s'est révélée un obstacle, notamment dans l'étude des topologies dites faibles.

Dans le même texte[20], Weil emploie des expressions comme

> ... *il n'est plus légitime ...*

Cela peut paraître banal, mais ce n'est pas si fréquent chez les mathématiciens, lesquels n'ont en général pas à se justifier. Weil entend par là qu'il existe une "loi" supérieure qu'il se doit de respecter. A propos de résultats, il parle de

> ... *distinguer ceux qui n'ont qu'un intérêt historique ou de curiosité de ceux qui sont vraiment féconds*[21].

Ici il s'agirait plutôt de "charité" au sens primitif : le fait de tenir son lecteur pour quelqu'un de précieux auquel il offre la totalité de sa pensée.

Lorsqu'il introduit une terminologie, Weil prend complètement ses responsabilités[22].

> *Par ... j'entends un ensemble E ...*

Cette façon de s'exprimer au singulier, qui n'a pourtant rien d'extraordinaire, est assez rare en mathématiques. Elle est d'ailleurs ambiguë; on pourrait croire que l'auteur se retranche derrière un choix personnel alors qu'il signifie au contraire que ce choix lui est imposé.

Même à l'occasion d'un ouvrage d'enseignement, on retrouve ce style direct chez Cartan[23] à plusieurs reprises.

---

[19] ([We1], 1937, p. 147)
[20] [WE1, 1937, p. 147)
[21] ([We1], 1937, p. 148)
[22] [We1], 1937, p. 148)
[23] ([Ca], 1961, p. 8)

Ainsi se trouve établie, avec toute la netteté désirable ...

... on a pensé que quelques énoncés précis étaient préférables à de vagues intuitions et à des idées floues.

Il est vrai que, parmi les membres du groupe Bourbaki, Weil était sans doute le plus fervent, suivi par Cartan. On ne peut pas en dire autant de tous les membres du groupe. Voici, par exemple, ce qu'écrit Schwartz dans son ouvrage fondateur sur les distributions[24].

Nous allons introduire une topologie ... qui rendra les mêmes services ...

Il est habituel de rendre également topologique le dual d'un espace vectoriel topologique.

Ce ne sont plus des vérités absolues qu'il assène. Ce sont des choix qu'il avance avec prudence, sans s'engager personnellement, dont il pense et laisse penser qu'ils ne sont motivés que par leur utilité pratique, voire la simple habitude. Dans un ouvrage d'enseignement[25], voici encore comment il introduit un nouvel objet mathématique.

Cette topologie s'appelle topologie produit.

On appelle $\hat{E}$ un complété de E : il est unique au sens suivant ...

L'idée que les objets s'imposent échappe totalement au discours. Or c'est tout un pan des mathématiques auquel Schwartz va tourner le dos en pensant de la sorte. Une topologie (finale ou duale), un produit, un complété, sont en général caractérisés de façon unique par leurs propriétés avant même d'exister. C'est tout le mérite de la découverte des problèmes universels par Pierre Samuel en 1948 et des foncteurs représentables par Grothendieck en 1961.

On lit aussi bien ceci[26], qui, d'un côté, n'est pas le signe d'une conviction très affirmée et, de l'autre, ferme la porte à la caractérisation des objets par leurs propriétés.

... la structure à placer sur F^E peut parfois être choisie de plusieurs manières très différentes.

On trouve la même façon de s'exprimer, qui tranche avec celle des mathématiciens animés par la foi, chez beaucoup d'auteurs, y compris chez les plus renommés. Dans un petit cours de Cédric Villani[27] qui partage avec Schwartz le fait d'avoir reçu une médaille Fields, il est question de *nombreux ouvrages populaires* ou d'*espaces de Banach célèbres.*

Bien sûr il faudrait éplucher quantité d'écrits pour se faire une idée précise de la présence de la foi dans la pratique des auteurs. Ce serait un travail considérable, mais sans doute très utile.

Une part de légende.

Il n'est pas très étonnant qu'une part de légende se glisse dans les mathématiques du 20ème siècle ici étudiées. Pour un paysage classique, on distingue le vrai paysage, celui du monde physique, d'une éventuelle représentation, picturale par exemple. Dans les mathématiques considérées, cette distinction n'existe pas. Le paysage est tout à la fois une composante d'un univers absolu et une représentation de cet univers.

[24] ([Sc1], 1957)
[25] [Sc3, 1981, p. 61 et p. 134)
[26] [Sc3], 1981, p. 188)
[27] ([Vi], 2004, p. 8 et p. 23)

Quand, au début des années 1950, Grothendieck[28] écrit à Serre qu'il "apprend" l'algèbre homologique, faisant référence à un livre de Cartan et Samuel qui n'est pas encore paru et dont il ne connaît pas le contenu, en réalité il la crée. S'il lui semble lire dans un livre ouvert posé devant ses yeux, en réalité il écrit tout simplement ce livre.

Ainsi n'y a-t-il pas de différence entre observer un paysage et le peindre. Cependant, si l'on ne peut observer qu'en peignant, cela ne signifie pas que l'on puisse peindre le paysage à sa guise, bien au contraire. L'acte de peindre doit être ressenti comme une observation, dans une quête de vérité absolue.

Il a été convenu que l'adhésion à l'existence d'un "monde mathématique" était liée à la vertu épistémique ici désignée comme la foi. Or la légende est une façon, parmi d'autres, d'exprimer sa foi.

Parfois la légende peut être qualifiée de plus vraie que la réalité, mais elle fait surtout partie de cette réalité, dont il lui arrive d'être le meilleur. Cartan, dans son enseignement avancé, se permettait souvent de prendre des raccourcis plus ou moins licites. On disait de lui qu'il "escroquait" beaucoup. En dépit du fait qu'ils ne tenaient pas toujours à un examen approfondi, ces raccourcis contenaient malgré tout une part de la vérité.

Lorsque Weil fustige, dans un passage de son texte sur les espaces à structure uniforme précédemment cité, les hypothèses de dénombrabilité, d'un côté il a parfaitement raison et de l'autre il ne peut empêcher que ces hypothèses jouent aussi un rôle à l'occasion. D'ailleurs il contribue lui-même à cerner avec précision quel est ce rôle.

A l'époque où Grothendieck s'occupait encore d'analyse fonctionnelle et écrivait sa thèse sur les produits tensoriels topologiques[29], il ajoutait en note ceci.

> *Un tel énoncé, faisant intervenir une "variable" dans la catégorie de "tous" les espaces vectoriels, n'est peut-être pas licite dans les systèmes logiques usuels, mais pourrait, dans chaque cas où nous employons un énoncé de cette nature, se remplacer par un énoncé explicite plus légitime. Nous préférons dans la suite conserver ces énoncés "naïfs", plus frappants et plus simples, et qui en fait ne risquent d'amener aucune difficulté.*

Dans ce cas particulier, la transgression assumée par Grothendieck est tout à fait minime. Plus personne n'y ferait attention aujourd'hui. Cependant l'idée générale de la légende est bien là. C'est le tableau d'un impressioniste qui parle plus qu'une photographie. C'est la caricature qui ressemble plus au modèle qu'un portrait fidèle.

Pour finir il est loisible de reconsidérer brièvement la façon dont **la pratique nouvelle influence la vision et la stratégie** dans le domaine considéré au départ.

Les structures de l'Analyse sont rigides. Le parti-pris de Bourbaki de tout ramener aux structures ne laisse pas d'ambiguïté. Comme cela a été dit, c'est un pas vers l'unité du "monde mathématique". Un objet de l'analyse fonctionnelle est la donnée d'une structure algébrique, d'espace vectoriel dans le cas présent, en même temps que d'une topologie ou de ce qui peut jouer un rôle semblable. Cela a une conséquence importante : on ne doit pas partir d'une structure vectorielle pour se demander ensuite quelle topologie ou autre complément on peut y ajouter. Les deux composantes de la structure doivent toujours être liées.

[28] [GS], 2001)

[29] ([Gr2], 1955, p. 28)

Cela dit, en analyse fonctionnelle, les structures topologiques ne sont pas loin d'être aussi *rigides* que les structures algébriques; au moins doit-on les penser comme telles, dans la vision unitaire du "monde mathématique".

Bien sûr, le même Bourbaki a découvert, avec les topologies, une souplesse qu'il ne connaissait pas en Algèbre. On peut notamment avoir à considérer l'ensemble ordonné de toutes les topologies, éventuellement vectorielles ou localement convexes, sur un ensemble ou espace vectoriel donné. Il est tout aussi vrai que Bourbaki a largement joué de cette souplesse dans son livre des EVT. Dès la première rédaction, il envisage ainsi, sur un espace normé trois topologies qu'il nomme faible, forte et intermédiaire. Plus tard, avec l'exemple de l'espace des applications linéaires continues entre deux espaces vectoriels topologiques E et F, c'est presque l'indécision qui domine, avec les topologies faible, compacte, forte, puis, de plus généralement celle de la convergence uniforme sur un système de parties bornées qu'on se donne en addition.

Pour autant, la souplesse en question a été largement surestimée. Par exemple, sur un espace vectoriel de fonctions comme l'espace L^p de puissance p-ième sommable sur la droite, la topologie de la norme semble en concurrence avec la topologie faible. Or on peut voir les choses autrement. D'un côté il y a l'espace normé L^p. De l'autre il y a l'espace disqué dont la bornologie — i.e. la donnée d'un système de parties bornées — est donnée par la norme et dont la topologie, faible, découle de la dualité. Dans les applications, on a souvent besoin de savoir qu'une partie convexe bornée fermée est faiblement compacte. Les deux notions de convergence sont là ensemble alors que le rôle des opérations algébriques a été plutôt réduit. Par ailleurs, avec les espaces disqués introduits plus tards par Christian Houzel, pour lesquels on s'est donné à la fois une topologie et une bornologie, la question de la structure d'un espace d'applications linéaires se résout naturellement.

Après tout, les arguments pour la rigidité vont dans le sens de la quête d'unité qui anime, parmi d'autres, Bourbaki pour présenter sa mathématique et pour entrevoir l'univers qui la compose.

Les espaces de l'Analyse arrivent tout habillés. Il faut aussi voir que les objets de l'analyse fonctionnelle nous parviennent *tout habillés* d'une notion de convergence, qui leur confère une structure naturelle. En effet ils ne sont pas sortis du hasard; ils ont une histoire qu'ils conservent en permanence avec eux. On retrouve, à cette occasion, ce qu'on connaît bien avec les structures algébriques élémentaires.

Au moins à un certain niveau, on ne définit pas ce qu'est un nombre complexe; on ne définit pas non plus leur ensemble. On définit tout de suite le *corps* $\mathbf{C}$ de ces nombres — avec la donné d'une racine carrée de l'unité — comme une extension du corps $\mathbf{R}$ des nombres réels, dans une démarche de résolution d'un problème plutôt qu'une construction explicite. Les opérations sur $\mathbf{C}$ sont indissociables de l'objet.

De la même façon, sur la droite réelle, des espaces tels que L^p ou $W^{1,p}$ peuvent être introduits, par complétion, à partir de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^0$ ou $\mathcal{C}^1$ à support compact, que l'on munit d'une certaine norme. Le complété arrive ainsi équipé d'une norme, celle du complété.

L'espace $\mathcal{D}$ de Schwartz provient d'une dualité faisant intervenir l'espace de Fréchet des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le support est dans une partie compacte K donnée. On l'obtient en laissant varier cette partie compacte, ce qui revient, en langage moderne, à dire qu'on prend une limite inductive. S'il faut absolument en faire un espace localement convexe, la voie est alors toute tracée.

Reprenons l'exemple de l'espace L^p et de son homologue faible. Ces deux objets ont des lieux de naissance différents. On peut, certes, déduire l'espace faible de l'espace normé. En même temps, le premier provient de la dualité entre L^p et L^q, laquelle peut être utile, sans être pour autant indispensable, pour définir le dernier.

On ne dira donc pas qu'on a coutume de mettre une topologie sur le dual, que telle topologie sur tel espace est classique, ni même que telle autre est commode dans la résolution de beaucoup de problèmes. On ne dira pas qu'on connaît sur l'espace $\mathcal{D}$ deux topologies vectorielles localement convexes, l'une de Schwartz et l'autre de Whitney, pour lesquelles les espaces duaux diffèrent, fournissant les distributions générales pour l'un et celles d'ordre fini pour l'autre. Il y a un espace $\mathcal{D}$ et un autre espace venant d'ailleurs.

Conclusion.

Même si l'étude précédente ne s'appuie que sur quelques exemples, elle fait déjà apparaître un certain nombre de points.

1) Il y a une qualité particulère dans les travaux des mathématiciens du vingtième siècle considérés, qui les différencie de travaux concurrents et qui ouvre de nouvelles perspectives à la science mathématique.

2) Cette qualité est liée à une forme de pureté, qui n'est pas celle usuellement considérée en philosophie de la discipline, mais pour laquelle "pur" est synonyme de "naturel", au sens de la conformité avec une certaine nature, représentée par le "monde mathématique".

3) La quête de pureté est alors sous-tendue par une vertu épistémique nouvelle, désignée ici par la "foi", qui est l'adhésion à l'existence d'un tel monde.

4) Cette vertu peut être assez facilement repérée dans les écrits, lorsqu'on compare des travaux d'une même spécialité.

Le sujet est, certes, bien loin d'être épuisé. En réalité c'est l'ouverture à de nouvelles études qui est visée.

Bibiographie

Textes mathématiques.

[Bo] N. Bourbaki, “Espaces vectoriels topologiques”, *Eléments de mathématiques*, Hermann, Paris, 1953-1981.

[Ca] H. Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d’une ou plusieurs variables complexes*, Enseignement des sciences, Hermann, 1961.

[DS] J. Dieudonné et L. Schwartz, “La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$”, *Annales de l’Institut Fourier* vol.1 (1948), p. 61-101.

[Gr1] A. Grothendieck, “Résumé des principaux résultats dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires”, *Annales de l’Institut Fourier* vol. 4 (1952), p. 73-112.

[Gr2] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, thèse; repris dans les *Memoirs of the American Mathematical Society* n° 16 (1955).

[Gr3] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, Saõ Paulo, 1953.

[NB1] Nicolas Bourbaki, “Sur certains espaces vectoriels topologiques”, *Annales de l’Institut Fourier*, vol 2. vol.1 (1950), p. 5-16.

[Sc1] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, tome 1, Hermann, Paris, 1957.

[Sc2] L. Schwartz, *Séminaire 1953/1054 : produits tensoriels topologiques d’espaces vectoriels topologiques, espaces vectoriels topologiques nucléaires, applications*, Paris

[Sc3] L. Schwartz, *Cours d’analyse*, Hermann, Paris, 1981.

[Vi] C. Villani, *Panorama naïf des espaces fonctionnels*, à l’adresse :
http:\\math.univ-lyon1.fr/homes-www/villani/Cours/PDDFILES/ana-chap1.pdf

[We1] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, 39p., Hermann, Paris, 1937.

Textes philosophiques et historiques.

[AD] A. Arana et M. Detlefsen, “Purity of Methods”, *Philosophers’ Imprint* vol. 11 n° 22 (2011), p. 1-20.

[Ar] A. Arana, “Logical and Semantic Purity”, *Protosociology* vol. 25 (2008), p. 38-48; repris dans *Philosphy of Mathematics : Set Theory, Measuring Theories, and Nominalism*, édité par Gerhard Preyer et Georg Peter, Ontos, 2008.

[Di], J. Dieudonné, “David Hilbert”, *Les grands courants de la pensée mathématique*, présenté par F. Le lionnais, p. 291-297, Albert Blanchard, Paris, 1962.

[Gr4] A. Grothendieck, *Récoltes et semailles, témoignage sur un passé de mathématicien*, 1985.

[GS] *Correspondance Grothendieck-Serre*, édité par P. Colmez, J.-P. Serre, Documents mathématiques 2 (2001), SMF, Paris.

[Ha] M. Hallet, Reflexion on the Purity of Methods in Hilbert’s Grundlagen der Geometry, *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford Scholarship Online Monographs, Mancosu (2008), p. 278-358.

[Kr] R. Krömer, *Tool and objet. A history and philosophy of Category theory*, Science Network Historical Studies, vol. 32, Birkhäuser, Bâle, 2007.

[NB2] Nicolas Bourbaki, “L’architecture des mathématiques”, *Les grands courants de la pensée mathématique*, présenté par F. Le lionnais, p. 35-47, Albert Blanchard, Paris, 1962.

[Po] R. Pouivet, “Moral and Epistemic Virtues : a Thomistic and Analytical Perspective”, *Forum Philosophicum*, vol. 15 (2010).

[We2] A. Weil, “L’avenir des mathématiques”, *Les grands courants de la pensée mathématique*, présenté par F. Le Lionnais, p. 307-320, Albert Blanchard, Paris,1962.